3 Komplexe Zahlen

Wie oben erwähnt, werden wir auf die komplexen Zahlen zurückkommen. Mit den komplexen Zahlen kann man die Nullstellen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ bestimmen. Wenn man nur die reellen Zahlen verwendet, hat dieses Polynom keine Nullstelle. Die komplexen Zahlen sind also eine Erweiterung der reellen Zahlen. Wichtig dabei ist natürlich, dass alle Rechengesetze der reellen Zahlen erhalten bleiben sollen.

Definition 3.1. Komplexe Zahl, Konjugation

- *Unter einer* **komplexen Zahl** $z \in \mathbb{C}$ *versteht man eine Zahl der Form*

$$z = a + ib, \ \textit{mit } a, b \in \mathbb{R} \textit{ wobei } i^2 = -1.$$

- a *nennt man den* **Realteil** $Re(z)$ *und* b *den* **Imaginärteil** $Im(z)$ *der komplexen Zahl* z.
- *Zu einer komplexen Zahl* $z = a + ib$ *heißt* $\overline{z} := a - ib$ *die* **konjugiert komplexe Zahl**.

Bemerkung: Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind reell! Außerdem ist $i \neq \sqrt{-1}$!

Nun müssen wir überlegen, ob unsere Rechengesetze wirklich erhalten bleiben und ob wir bei den möglichen Verknüpfungen immer in $\mathbb{C}$ bleiben. Das bedeutet, dass wir nachprüfen müssen, ob $\mathbb{C}$ bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (natürlich ohne die Null) abgeschlossen ist.

Definition 3.2. Rechengesetze für komplexe Zahlen
Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $c = a + ib$ *und* $z = x + iy$. *Dann gilt:*

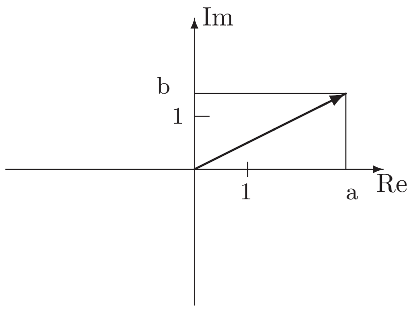
- *Addition:* $c + z = (a + ib) + (x + iy) := (a + x) + i(b + y)$
- *Subtraktion: Übung!*
- *Multiplikation:* $c \cdot z := (a + ib) \cdot (x + iy) = ax + aiy + ibx + i^2by = (ax - by) + i(ay + bx)$
- *Division:* $\frac{c}{z} = \frac{a+ib}{x+iy} = \frac{a+ib}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{c\overline{z}}{z\overline{z}}$, *falls* $z \neq 0$

Satz 3.3. Rechenregeln für die Konjugation *Seien* y *und* z *komplexe Zahlen, dann gilt*

- $\overline{y \pm z} = \overline{y} \pm \overline{z}$
- $\overline{y \cdot z} = \overline{y} \cdot \overline{z}$
- *gilt zusätzlich* $z \neq 0$, *so ist* $\overline{\left(\frac{y}{z}\right)} = \frac{\overline{y}}{\overline{z}}$

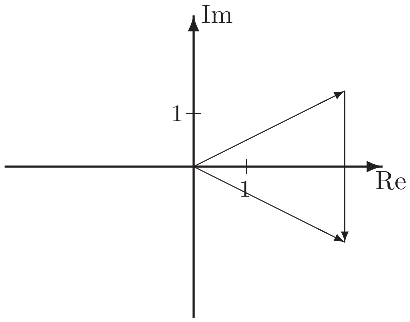
Anschauung:

Eine komplexe Zahl läßt sich als Punkt mit den Koordinaten (a, b) der sogenannten Gaußschen Zahlenebene auffassen:

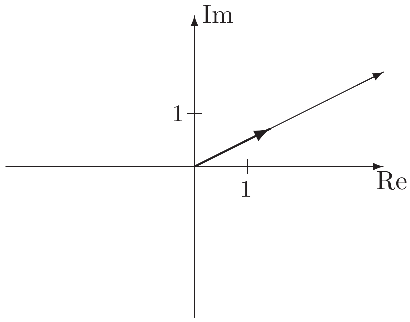


Nun können wir uns auch die Addition zweier komplexer Zahlen und die Multiplikation einer komplexen mit einer reellen Zahl veranschaulichen:

Addition:



Multiplikation mit einer reellen Zahl:

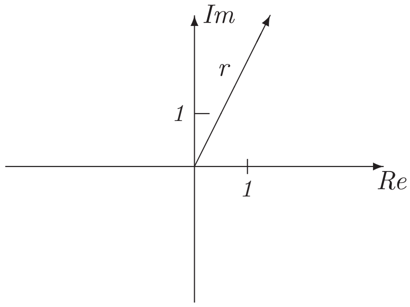


Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen lässt sich so zunächst nur schwer verstehen, eine andere Darstellung liefert jedoch eine hilfreiche Anschauung:

Definition 3.4. Betrag, Argument, komplexe Exponentialfunktion, Polardarstellung
Gegeben sei eine komplexe Zahl $z = a + ib$

(i) *Der* **Betrag** *r einer komplexen Zahl ist definiert durch*

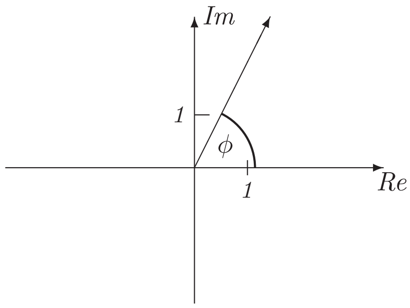
$$\begin{aligned} r := |z| &:= \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \end{aligned}$$



(ii) *Das* **Argument** *von z $Arg(z)$ ist der gerichtete Winkel ϕ zwischen der positiven rellen Achse und dem Strahl vom Ursprung nach z. Da wir bei Addition von 2π denselben Strahl erhalten, wollen wir jeden Winkel der Form*

$$\phi + 2\pi \cdot k \quad (k \text{ eine feste ganze Zahl })$$

als Argument von z bezeichnen.



(iii) *Die* **komplexe Exponentialfunktion** *ist über eine so genannte Reihendarstellung definiert*[5] *die wir euch hier nicht zumuten wollen (das kommt dann später in einer richtigen Mathevorlesung). Anschaulich lässt sie sich aber so verstehen:*

[5] ☣ Der Vollständigkeit halber wollen wir die Reihe (eine Reihe kann man sich als Summe mit im allgemeinen unendlich vielen Gliedern vorstellen) angeben

$$\exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

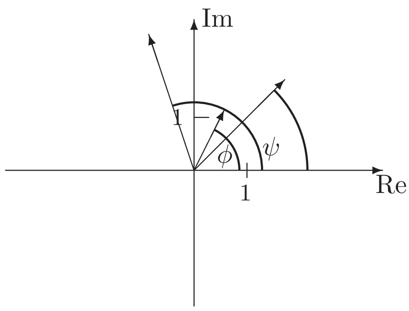
- *Ist das Funktionsargument reell, so ist die komplexe Exponentialfunktion gleich der reellen (siehe Abschnitt 4)*
- *Ist das Funktionsargument imaginär (z.B. $i\phi$), wirkt eine Multiplikation mit $\exp(i\phi)$ als Drehung um den Ursprung mit dem Winkel ϕ (im Gegenuhrzeigersinn)*
- *Es gilt:* $\exp(a + ib) = \exp(a)\exp(ib)$

(iv) *Nun lässt sich jede komplexe Zahl anstatt durch Real- und Imaginärteil auch durch ihren Betrag und ihr Argument beschreiben*[a]*:*

$$z = a + ib = |z|e^{iArg(z)}$$

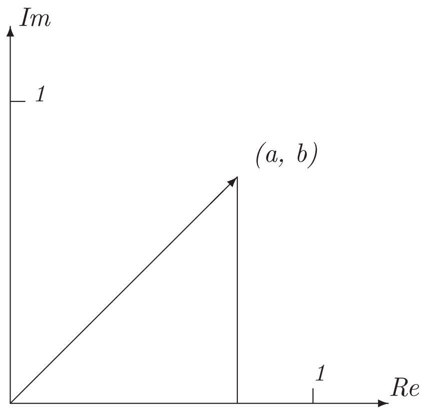
[a]Man beachte: Beide Darstellungen lassen sich ineinander überführen, deshalb ist die Beschreibung in beiden Fällen vollständig. Nur die 0 hat kein eindeutiges Argument (man definiert es dann meistens ebenfalls als 0)

Mit Hilfe der Polardarstellung können wir uns leicht veranschaulichen, wie zwei komplexe Zahlen multipliziert werden: Die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert.



Satz 3.5. Übergang von einer Darstellung zur anderen:

(i) **Von kartesischer zu Polardarstellung:**
r ist leicht zu berechnen als Betrag von $a + ib$.
Für ϕ ist ein wenig Überlegung nötig. Alle Zahlen auf dem Kreis mit dem Abstand 1 zum Ursprung (auch Einheitskreis genannt) können wir mit den trigonometrischen Funktionen darstellen (s. Bild). Teilen wir eine Zahl durch ihren Betrag, liegt das Ergebnis auf dem Einheitskreis, somit lassen sich alle Winkel bestimmen. Wir erhalten:



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Satz des Pythagoras)} \\ \phi &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & , \text{ falls } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & , \text{ falls } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ falls } a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ falls } a = 0 \text{ und } b < 0 \\ 0 & , \text{ falls } a = b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) **von Polar- zu kartesischer Darstellung:** *Übung!*
Sei $z = (r, \phi)$ eine komplexe Zahl in Polardarstellung. Dann gilt $z = a + ib$ mit:

$a =$

$b =$